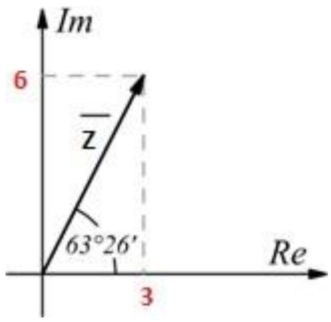
APPUNTI SUI SEGNALI SINUSOIDALI

Consideriamo una grandezza complessa

$\overline{Z} = 3 + j6$ **forma binomiale**

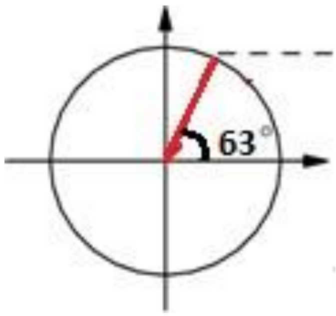
Rappresentazione grafica



Si può risalire alla sua forma polare calcolando

Modulo |Z| $= \sqrt{3^2 + 6^2}$ = 6,7

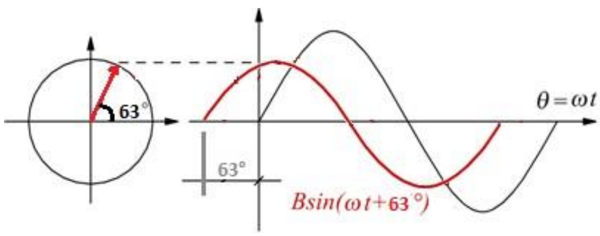
Fase α = arctg 6/3 =63°,26' =63,43



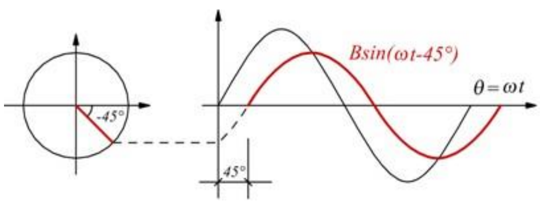
$\overline{Z} = 6,7\ e^{J\ 63,43°}$ **forma polare**

Oppure alla sua forma trigonometrica

$$Z(t) = (6,7 * \sqrt{2})\sin(wt + 63°,43)$$



esempio di sinusoide in anticipo di fase di 63° rispetto alla sinusoide originaria di fase 0: Vsin(ω t).



esempio di sinusoide in ritardo di fase di 45° rispetto alla sinusoide originar[i]a di fase 0: Vsin(ω t).

Angoli particolari

gradi	radianti	sin	cos	tg	ctg
0°	0	0	1	0	non esiste
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste	0
180°	π	0	- 1	0	non esiste
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	non esiste	0
360°	2π	0	1	0	non esiste

In questo modo, praticamente, si rappresentano i segnali di corrente e tensione in alternata, in quanto la parte immaginaria viene rappresentata da induttanze e condensatori, mantre la parte reale da resistori.

Si parlerà, pertanto di

Impedenza= Resistenza + Reattanza [Ω]

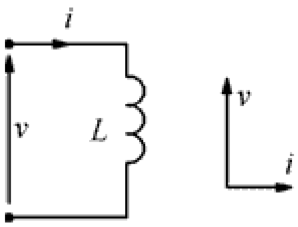
$$\bar{Z} \quad = \quad R \quad + j\,X$$

dove la reattanza X può essere positiva nel caso di una induttanza **X_L= wL -> jX_L= jwL** oppure negativa nel caso di un condensatore **Xc= 1/wC**

1.

usando i numeri complessi si scriverebbe:

$$\overline{X}_L = jX_L = j\omega L$$

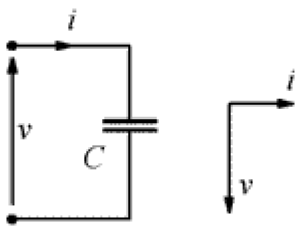


Se si applica una tensione sinusoidale ai capi di una induttanza L, la corrente ottenuta è sinusoidale in ritardo di 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ rispetto alla tensione

(vedi esercizio n° 7 Edutecnica)

2.

$$\overline{X}_C = -jX_L = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$



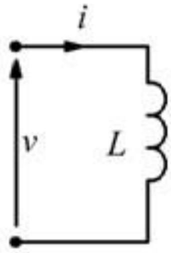
Se si applica una tensione sinusoidale ai capi di un condensatore C la corrente impressa è sinusoidale, in anticipo di 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ rispetto alla tensione

(vedi esercizio n° 8 Edutecnica)

Esercizio no.7

La corrente $i = 20\sin(\omega t - 30°)\ A$
percorre l'induttanza L=4mH alla frequenza f=200 Hz.

Trovare la tensione applicata ai sui estremi.



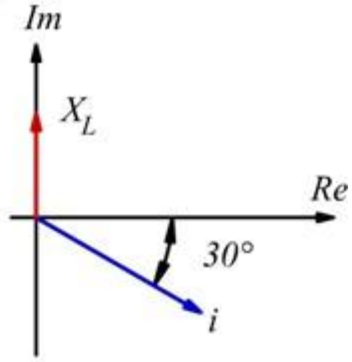
Esercizio no.7:soluzione

Applichiamo la legge di Ohm: $v = jX_L \cdot i$ con $i = 20\, e^{-j30°}$

mentre la reattanza induttiva:

$$jX_L = j\omega L = j2\pi f L = j2\pi \cdot 200 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = j5\ [\Omega]$$

si tratta di un numero immaginario, come tale rappresentabile sul piano di gauss come un vettore completamente collocato sull'asse immaginario.



per la rappresentazione polare $jX_L = 5\, e^{j90°}$ quindi avremo:

$$v = jX_L \cdot i = 5\, e^{j90°} \cdot 20\, e^{-j30°} = 100\, e^{j60°}\ [V]$$

in forma trigonometrica: $v = 100\sin(\omega t + 60°)\ \ V$

come si nota la tensione è in anticipo sulla corrente di 90°.

Esercizio no.8

La reattanza offerta da un condensatore C quando è applicata la tensione $v = sin(10^4 t)$ *V è di* 50Ω*; si calcoli il valore della capacità e la corrente che scorre in essa.*

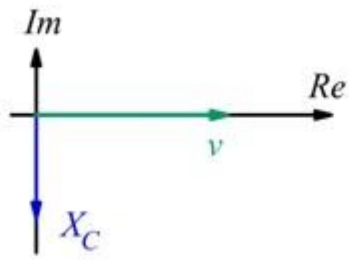
Esercizio no.8:soluzione

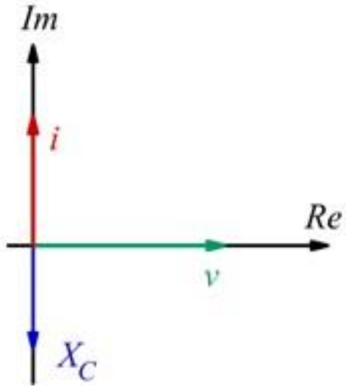
Con $v = sin(10^4 t)$ *V si ha* $X_C = 50\Omega$*; è richiesta* C *ed i.*

La pulsazione ω *è nota come* $\omega = 10^6$ *rad/s ; dato che* $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ *otteniamo:*

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^4 \cdot 50} = 2 \cdot 10^{-6} F = 2\mu F$$

dal punto di vista vettoriale una reattanza capacitiva come $\overline{X}_C = -j50\,\Omega$ *è un vettore collocato sull'asse immaginario del piano di Gauss, con verso negativo; mentre la tensione v vale 1 V e ha fase 0°; quindi è collocata sull'asse reale con verso positivo.*
In forma polare:

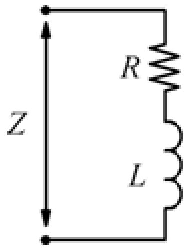




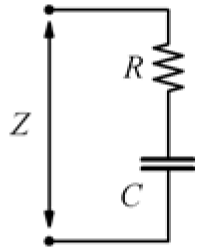
$\overline{X}_C = 50\,e^{-j90°}$ *mentre* $\overline{V} = 1\,V$ *applicando la legge di Ohm:*

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{X}_C} = \frac{1}{50\,e^{-j90}} = \frac{e^{j90°}}{50} = 0{,}02\,e^{j90°} = 20\,e^{j90°}\ mA$$

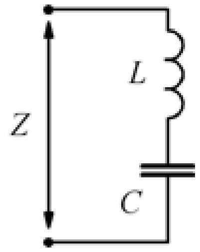
Si può risalire all'impedenza Z offerta da circuiti anche complessi.
Alcuni esempi immediati sono i seguenti:



$$\overline{Z} = R + jX_L$$
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$
$$\theta = atg\frac{X_L}{R}$$



$$\overline{Z} = R - jX_C$$
$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$
$$\theta = atg\left(-\frac{X_C}{R}\right)$$



$$\overline{Z} = jX_L - jX_C$$
$$Z = X_L - X_C$$
$$\theta = \pm 90°$$